

บทที่ 3

ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นและสถิติที่ใช้ในการวิจัยเกี่ยวข้องกันอย่างมาก ความน่าจะเป็นนับเป็นเครื่องมือสำคัญอย่างหนึ่งที่จะช่วยให้นักสถิติหรือนักวิจัยใช้หลักการ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้การได้มาซึ่งข้อมูลจากตัวอย่างที่จะนำไปสู่การหาข้อสรุปที่สำคัญให้กับประชากรนั้นมีความถูกต้อง ข้อสรุปจะถูกต้องและสมเหตุสมผลเพียงใด ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความน่าจะเป็นจึงเป็นศาสตร์ที่ถูกนำมาใช้กันอย่างกว้างขวางเพื่อให้งานที่เกี่ยวข้องกับสถิติและการวิจัยมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น การทำความเข้าใจเกี่ยวกับความน่าจะเป็นจะเกี่ยวข้องกับ เซต การดำเนินการของเซต ทฤษฎีหรือกฎการนับเบื้องต้น รวมไปถึงความน่าจะเป็นมีเงื่อนไข ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป

3.1 เซตและเซตย่อย

เซต (set) เป็นเทอมอนิยาม ที่มีความหมายตรงกับคำในภาษาไทย เช่น กลุ่ม คณะ ชุด ฟังก์ชัน เป็นต้น แต่ละคำบ่งบอกถึงการอยู่รวมกันของสิ่งต่าง ๆ เช่น กลุ่มของนักศึกษา คณะลิเก ชุดการแสดง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในการเขียนเซตกำหนดให้ใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A B C D X Y Z แทนเซต และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น a b d e w x y z แทนสมาชิกของเซต ในการกล่าวถึงเซตได้มีการระบุไว้ชัดเจนว่าจำเป็นต้องกำหนดหรือบ่งชี้ว่าสิ่งใดเป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซต ซึ่งวิธีการเขียนเซตมีอยู่ 2 วิธี คือ

3.1.1 การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก

การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกเป็นการเขียนเซตที่ใช้ในกรณีที่เซตนั้นมีสมาชิกจำกัดซึ่งสามารถที่จะแจกแจงสมาชิกได้โดยใช้เครื่องหมายจุลภาค (comma) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว และเขียนสมาชิกทุกตัวภายในวงเล็บปีกกา เช่น

เซต	สมาชิกของเซต	เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก
A	1 3 5 7 9	$A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$
B	ผลลัพธ์ทั้งหมดจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง	$B = \{ HH, HT, TH, TT \}$ เมื่อ H แทนหัว, T แทนก้อย

3.1.2 การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข

การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขเป็นการเขียนเซตที่ใช้เขียนเพื่อบอกสมบัติหรือคุณลักษณะของเซตใด ๆ เช่น

เซต	สมาชิกของเซต	เขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข
C	จังหวัดที่มีประชากรเกิน 1 ล้านคน	$C = \{ x \mid x \text{ เป็นจังหวัดที่มีประชากรเกิน 1 ล้านคน } \}$ x เป็นสมาชิกใด ๆ ของเซต C
Y	สระในภาษาอังกฤษ	$Y = \{ y \mid y \text{ เป็นสระในภาษาอังกฤษ } \}$ y เป็นสมาชิกใด ๆ ของเซต Y

นอกจากนี้ใช้สัญลักษณ์ $\in$ แทน “เป็นสมาชิกของ” และใช้สัญลักษณ์ $\notin$ แทน “ไม่เป็นสมาชิกของ” ตัวอย่างเช่น

ถ้า x เป็นสมาชิกของ A เขียนโดยใช้สัญลักษณ์ได้เป็น $x \in A$ และ

ถ้า x ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนโดยใช้สัญลักษณ์ได้เป็น $x \notin A$

ตัวอย่างที่ 3.1 ให้ $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ และ $B = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 5 ลงตัว } \}$

วิธีทำ จะได้ว่า $2 \in A$ $15 \in B$
 $5 \notin A$ $8 \notin B$

บทนิยามที่ 3.1 เซตสองเซตใด ๆ จะเป็นเซตที่เท่ากันถ้าเซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

ถ้าเซต A เท่ากับเซต B แล้ว สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $A = B$ อย่างไรก็ตาม ถ้ามีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว ของเซต A ไม่เป็นสมาชิกของเซต B หรือสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว ของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A กล่าวได้ว่าเซต A ไม่เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

ตัวอย่างที่ 3.2 ให้ $A = \{ 1, 3, 5 \}$ $B = \{ 3, 1, 5 \}$ $C = \{ 1, 3, 5, 7 \}$

วิธีทำ จะได้ $A = B$, $A \neq C$, $B \neq C$

ข้อสังเกต เซตจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อสมาชิกของเซตสลับที่กันหรือการสลับที่กันของสมาชิกในเซตไม่ทำให้เซตเปลี่ยนแปลง

บทนิยามที่ 3.2 เซตว่าง (null set or empty set) คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ϕ หรือ $\{ \}$

ตัวอย่างที่ 3.3 ให้ A เป็นเซตของทะเลทรายในประเทศไทยและให้ B เป็นเซตของคนที่มือน้ำหนักเกิน 2 ตัน จงเขียนเซต A และเซต B โดยใช้สัญลักษณ์

วิธีทำ $A = \phi$ และ $B = \phi$

พิจารณา $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{2, 4\}$ จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A กล่าวได้ว่า B เป็นเซตย่อย (subset) ของ A และใช้สัญลักษณ์ $B \subset A$ เมื่อใช้ $\subset$ แทน “เป็นเซตย่อยของ” และจะใช้สัญลักษณ์ $\not\subset$ แทน “ไม่เป็นเซตย่อยของ” เช่น $A \not\subset B$

บทนิยามที่ 3.3 ถ้าสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B แล้ว A เป็นเซตย่อยของ B

จากบทนิยามที่ 3.3 กล่าวได้ว่าเซตทุกเซตเป็นเซตย่อยของตัวเอง เซตย่อยใดๆ ของเซตใดเซตหนึ่งที่ไม่เป็นเซตย่อยของตัวเองเรียกว่า เซตย่อยแท้ (proper subset) ของเซตนั้น ดังนั้น เซต B เป็นเซตย่อยแท้ของเซต A ถ้า $B \subset A$ และ $B \neq A$

ตัวอย่างที่ 3.4 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 4\}$ $C = \{3, 2, 5, 1, 4\}$

วิธีทำ B เป็นเซตย่อยแท้ของเซต A

C ไม่เป็นเซตย่อยแท้ของเซต A เพราะ $C = A$

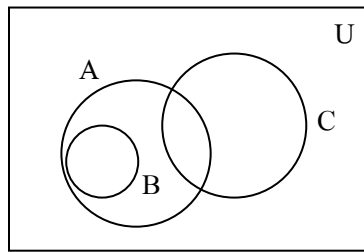
ในหลาย ๆ กรณี เราทราบว่าเซตทุกเซตจะเป็นเซตย่อยของเซตเฉพาะเซตหนึ่งเซตนั้นคือเอกภพสัมพัทธ์ (universe) และมักเขียนแทนด้วย U เช่น ในเรื่องระบบจำนวนในทางคณิตศาสตร์ เซตของจำนวนจริงจะถูกกำหนดให้เป็นเอกภพสัมพัทธ์ หรือในการศึกษาเรื่องของการสอบเข้าศึกษาต่อได้ เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของนักศึกษาที่เข้าสอบทั้งหมด นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาเซตย่อยทั้งหมดของเซต A เมื่อ $A = \{1, 2, 3\}$

วิธีทำ เซตย่อยทั้งหมดของเซต A ได้แก่

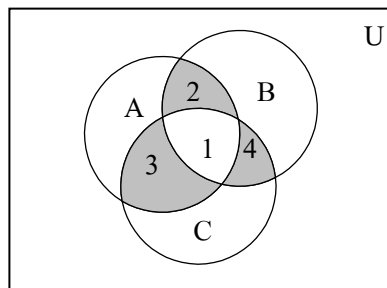
$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \phi$

จำนวนเซตย่อยทั้งหมดของเซตที่มีสมาชิก 3 ตัว คือ $2^3 = 8$ ดังนั้น เซตที่มีสมาชิก n ตัว จะมีจำนวนสมาชิกเป็น 2^n ตัว นั่นเอง ความสัมพันธ์ระหว่างเซตย่อยกับเอกภพสัมพัทธ์ที่เกี่ยวข้องกัน สามารถแสดงได้โดยใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ (Venn-Euler diagram) โดยกำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมแทนเซตของเอกภพสัมพัทธ์และใช้รูปวงกลมหรือรูปวงรีแทนเซตย่อย โดยเขียนอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมดังภาพที่ 3.1



ภาพที่ 3.1 แผนภาพแสดงการเขียนเซต

จากภาพที่ 3.1 จะเห็นว่า A, B, C เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ U $B \subset A$ และ B กับ C ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย ส่วน A กับ C มีสมาชิกร่วมกันบางตัว บางครั้งนิยมใช้การแรเงาในแผนภาพที่ใช้แทนเซต ดังภาพที่ 3.2



ภาพที่ 3.2 แผนภาพแทนเซตที่มีสมาชิกบางตัวร่วมกัน

จากภาพที่ 3.2 สมมติให้ A แทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเล่นกีฬาฟุตบอล B แทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเล่นกีฬาว่ายน้ำ C แทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเล่นกีฬาเทนนิส U แทนเซตของนักศึกษาทั้งหมด บริเวณหมายเลข 1 จะแทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเล่นกีฬาทั้งสามชนิด บริเวณหมายเลข 2 จะแทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเล่นฟุตบอลและว่ายน้ำแต่ไม่ชอบเทนนิส บริเวณหมายเลข 3 จะแทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเล่นฟุตบอลและเทนนิสแต่ไม่ชอบว่ายน้ำ บริเวณหมายเลข 4 จะแทนเซตของนักศึกษาที่ชอบว่ายน้ำและเทนนิสแต่ไม่ชอบฟุตบอล

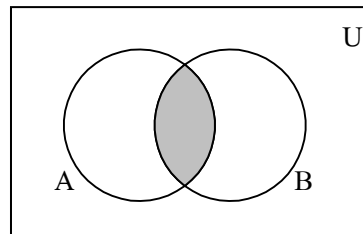
3.2 การดำเนินการของเซต

การดำเนินการของเซต (set operation) เป็นการกระทำระหว่างเซตซึ่งมีผลทำให้เกิดเซตใหม่โดยเซตใหม่นั้นจะต้องมีเอกภพสัมพัทธ์เป็นเอกภพสัมพัทธ์เดียวกันกับเซตเดิมและในการ

ดำเนินการของเซต จะต้องอาศัยตัวดำเนินการ (operator) ซึ่งได้แก่ ส่วนร่วม ส่วนรวม ผลต่าง และ ส่วนเติมเต็ม ดังจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

บทนิยามที่ 3.4 ส่วนร่วม (intersection) ของเซต A และเซต B คือเซตที่มีสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของทั้งเซต A และเซต B

ใช้สัญลักษณ์ $A \cap B$ แทนส่วนร่วมของเซต A และเซต B และใช้ สัญลักษณ์ $\wedge$ แทน “และ” นั่นคือ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ หรือเขียนโดยใช้แผนภาพได้ ดังภาพที่ 3.3



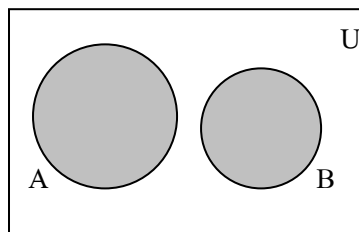
ภาพที่ 3.3 แผนภาพแทนส่วนร่วมของเซต A และเซต B

ตัวอย่างที่ 3.6 ให้ $A = \{a, b, c, d, e\}$ และ $B = \{c, d, e, f\}$ แล้ว $A \cap B = \{c, d, e\}$

ตัวอย่างที่ 3.7 ถ้า T เป็นเซตของบุคคลที่ต้องเสียภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา และ R เป็นเซตของบุคคลที่มีอายุ 60 ปีขึ้นไป แล้ว จะได้ว่า $T \cap R$ คือเซตของบุคคลที่ต้องเสียภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา ที่มีอายุ 60 ปี ขึ้นไปนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 3.8 ให้ $P = \{a, e, i, o, u\}$ และ $Q = \{r, s, t\}$ แล้ว $P \cap Q = \{\}$

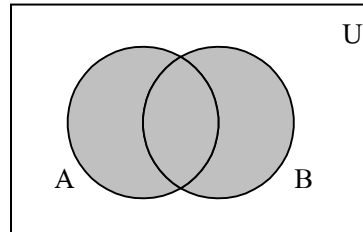
บทนิยามที่ 3.5 ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้วเซต A และเซต B เป็นเซตไม่มีส่วนร่วม (disjoint set) นั่นคือ เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย



ภาพที่ 3.4 แผนภาพแทนเซต A และเซต B เป็นเซตไม่มีส่วนร่วม

บทนิยามที่ 3.6 ส่วนรวม (union) ของเซต A และเซต B คือเซตที่มีสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A หรือเซต B หรือเป็นสมาชิกของทั้งสองเซต

ใช้สัญลักษณ์ $A \cup B$ แทนส่วนรวมของเซต A และเซต B และใช้สัญลักษณ์ $\vee$ แทน “หรือ” นั่นคือ $A \cup B = \{ x | x \in A \vee x \in B \}$ หรือเขียนโดยใช้แผนภาพได้ดังภาพที่ 3.5



ภาพที่ 3.5 แผนภาพแทนส่วนรวมของเซต A และเซต B

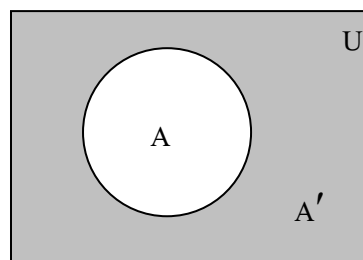
ตัวอย่างที่ 3.9 ให้ $A = \{ 2, 3, 5, 8 \}$ และ $B = \{ 3, 6, 8 \}$ แล้ว $A \cup B = \{ 2, 3, 5, 6, 8 \}$

ตัวอย่างที่ 3.10 ถ้า $M = \{ x | 3 < x < 9 \}$ และ $\{ y | 5 < y < 12 \}$ แล้ว $M \cup N = \{ z | 3 < z < 12 \}$

หากพิจารณาเอกภพสัมพัทธ์ คือนักศึกษาที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาสถิติวิเคราะห์ และกำหนดให้เซตของนักศึกษาที่สอบผ่านเป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ดังกล่าวแล้ว จะได้ว่าเซตของนักศึกษาที่สอบไม่ผ่านก็เป็นอีกเซตย่อยหนึ่งของเอกภพสัมพัทธ์นี้ และเป็นเซตที่ไม่มีส่วนร่วมกับเซตของนักศึกษาที่สอบผ่าน

บทนิยามที่ 3.7 ถ้า A เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ U แล้วเซตที่ไม่มีส่วนร่วมของ A คือเซตที่มีสมาชิกทุกตัวอยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน A

ใช้สัญลักษณ์ A' แทนเซตที่ไม่มีส่วนร่วมของ A นั่นคือ $A' = \{ x | x \in U \wedge x \notin A \}$ หรือเขียนโดยใช้แผนภาพได้ ดังภาพที่ 3.6



ภาพที่ 3.6 แผนภาพแทนเซตที่ไม่มีส่วนร่วมของเซต A

ตัวอย่างที่ 3.11 ให้ U เป็นเซตของไฟ 1 สำหรับ R เป็นเซตของไฟสีแดงในไฟสำหรับนั้น จงหา R'

วิธีทำ R' คือเซตของไฟที่ไม่ใช่สีแดงในสำหรับนั้น นั่นคือ ไฟสีดำนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 3.12 พิจารณาเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{ \text{โศก, สตรีสาร, หญิงไทย, คุณหญิง, แพรว, ลลนา} \}$

ถ้า $A = \{ \text{โศก, หญิงไทย, แพรว} \}$ แล้ว $A' = \{ \text{สตรีสาร, คุณหญิง, ลลนา} \}$

จากบทนิยามและทฤษฎีบทข้างต้น สรุปเกี่ยวกับการดำเนินการของเซตที่สำคัญ ๆ ได้ดังนี้

1. $A \cap \phi = \phi$
2. $A \cup \phi = A$
3. $A \cap A' = \phi$
4. $A \cup A' = U$
5. $U' = \phi$
6. $\phi' = U$
7. $(A')' = A$

3.3 ปริภูมิตัวอย่าง

ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการลองสุ่ม (random trial)

บทนิยามที่ 3.8 การลองสุ่มเป็นการทดลองที่ไม่สามารถบอกผลลัพธ์ที่แน่นอนได้ บอกได้แต่เพียงว่าผลลัพธ์จะเป็นอะไรได้บ้างเท่านั้น

บทนิยามที่ 3.9 เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการลองสุ่มเรียกว่า ปริภูมิตัวอย่าง และนิยมเขียนแทนด้วย S

บางครั้งเรียกปริภูมิตัวอย่างว่าเอกภพสัมพัทธ์ แต่นิยมใช้สัญลักษณ์ S แทนปริภูมิตัวอย่างมากกว่าที่จะใช้ U แทนปริภูมิตัวอย่าง เมื่อ S เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการลองสุ่ม

บทนิยามที่ 3.10 สมาชิกของปริภูมิตัวอย่างใด ๆ เรียกว่า หน่วยตัวอย่าง (sample point)

ตัวอย่างที่ 3.13 พิจารณาการทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าสิ่งที่สนใจคือการขึ้นหน้าของลูกเต๋าลแล้ว
ปริภูมิตัวอย่าง ได้แก่

$$S_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

แต่ถ้าสนใจการขึ้นหน้าของลูกเต๋าคือเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ ปริภูมิตัวอย่าง ได้แก่

$$S_2 = \{ \text{คู่, คี่} \}$$

จากปริภูมิตัวอย่าง S_1, S_2 จะเห็นว่า S_1 บอกรายละเอียดของผลลัพธ์ (outcomes) จากการลองสุ่มได้มากกว่า S_2 นั่นคือ ถ้าทราบว่าใน S_1 เกิดอะไรขึ้นได้บ้าง แต่สิ่งที่เกิดใน S_2 ไม่สามารถช่วยให้ทราบสมาชิกที่เกิดขึ้นใน S_1 ได้ โดยทั่วไปแล้วนิยามใช้ปริภูมิตัวอย่างที่สามารถให้รายละเอียดได้มากที่สุดจากการทดลอง (สมจิต วัฒนาชาญกุล, 2546; ศุภชัย นาทะพันธ์, 2547; ลดาวัลย์ รามางกูร, 2552)

ตัวอย่างที่ 3.14 โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง ปริภูมิตัวอย่างที่เป็นไปได้และให้รายละเอียดได้มากที่สุด คือ

$$S_1 = \{ HHH, HTH, THH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT \}$$

เมื่อ H แทนหัว และ T แทนก้อย

สำหรับ $S_2 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

สมาชิกของ S_2 แทนการขึ้นหัว 0 หัว 1 หัว 2 หัว และ 3 หัว

บทนิยามที่ 3.11 เหตุการณ์ คือ เซตย่อยของปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3.15 ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว จากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง จะได้ว่า
 $S = \{ H, T \}$ $A = \{ H \}$ และ $A \subset S$

บทนิยามที่ 3.12 ถ้าเหตุการณ์ใดเป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียง 1 ตัว ของปริภูมิตัวอย่างแล้ว เรียกเหตุการณ์นั้นว่าเป็นเหตุการณ์อย่างง่าย (simple event) ส่วนเหตุการณ์เชิงประกอบ (compound event) จะเป็นเหตุการณ์ที่เกิดจากส่วนรวมของเหตุการณ์อย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 3.16 ในการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่ 1 สำรับ ซึ่งมี 52 ใบ ถ้ากำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพแดง จะได้ว่า $A = \{ \text{โพแดง} \}$ เมื่อ $S = \{ \text{โพแดง, โพดำ, ดอกจิก, ข้าวหลามตัด} \}$ เรียก A ว่าเหตุการณ์อย่างง่าย ในขณะเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่สีแดง จะได้ว่า $B = \{ \text{โพแดง, ข้าวหลามตัด} \}$ เรียก B ว่าเป็นเหตุการณ์เชิงประกอบที่เกิดจากส่วนรวมของ $\{ \text{โพแดง} \} \cup \{ \text{ข้าวหลามตัด} \}$

ข้อสังเกต ส่วนรวมของเหตุการณ์อย่างง่าย จะเป็นเหตุการณ์เชิงประกอบซึ่งยังคงเป็นเซตย่อยของปริภูมิตัวอย่าง และหากพิจารณาปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นโพทั้ง 52 ใบแล้ว จะได้ว่า $A = \{\text{โพแดง}\}$ ซึ่งเซต A มีสมาชิก 13 ใบ จะเป็นเหตุการณ์เชิงประกอบทันที

3.4 การหาจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง

การหาจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างจากการลองสุ่มใด ๆ เป็นปัญหาหนึ่งที่นักสถิติควรพิจารณา ในการคำนวณหาจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างอันจะนำไปสู่การคิดคำนวณค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ ที่สนใจ ในกรณีที่สมาชิกมีจำนวนไม่มากนักอาจหาจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างได้โดยการนับ แต่ในกรณีที่สมาชิกมีเป็นจำนวนมาก หรือจำนวนของผลที่เกิดขึ้นมีเป็นจำนวนมาก (ลดาวัลย์ รามางกูร, 2552) เพื่อให้เกิดความสะดวกในการคำนวณหาจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างดังกล่าวข้างต้นควรจะต้องอาศัยหลักเกณฑ์เบื้องต้นในการนับ (ทวิรัตน์ ศิวดุลย์, 2539; Casella & Berger, 1990; ลดาวัลย์ รามางกูร, 2552) ซึ่งมีหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องจะได้กล่าวต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ถ้าการกระทำใดสามารถดำเนินการในขั้นตอนที่ 1 ได้ n_1 วิธี และแต่ละวิธีในขั้นตอนที่ 1 สามารถดำเนินการในขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี แล้วการกระทำนั้นสามารถดำเนินการได้ทั้งหมด $n_1 n_2$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.17 โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง

วิธีทำ ลูกเต๋าลูกที่ 1 อาจขึ้นหน้า 1, 2, 3, 4, 5, 6 เป็นไปได้ 6 วิธี

ลูกเต๋าลูกที่ 2 อาจขึ้นหน้า 1, 2, 3, 4, 5, 6 เป็นไปได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างทั้งหมด $= (6)(6) = 36$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.18 มีเสื้อสุท 5 ตัว กางเกง 7 ตัว จะสวมเสื้อสุทและกางเกงได้กี่ชุด

วิธีทำ มีเสื้อสุท 5 ตัว เลือกสวมเสื้อได้ 5 วิธี

มีกางเกง 7 ตัว เลือกสวมกางเกงได้ 7 วิธี

ดังนั้น จะสวมเสื้อและกางเกงได้ $= (5)(7)$ วิธี $= 35$ ชุด

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ถ้าการกระทำใดสามารถดำเนินการได้ในขั้นตอนที่ 1 n_1 วิธี และแต่ละวิธีในขั้นตอนที่ 1 สามารถดำเนินการในขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี และแต่ละวิธีในขั้นตอนที่ 1 และ 2 สามารถดำเนินการในขั้นตอนที่ 3 ได้ n_3 วิธี แล้ว การกระทำ k อย่าง ใน k ขั้นตอนสามารถดำเนินการได้ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.19 โยนเหรียญ 1 อัน ทอดลูกเต๋า 1 ลูก และหยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่ 1 สำรับ พร้อมกัน จะมีผลลัพธ์เกิดขึ้นได้กี่วิธี

วิธีทำ โยนเหรียญ 1 อัน เป็นไปได้ 2 หน้า (หัวกับก้อย) = 2 วิธี
 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก เป็นไปได้ 6 หน้า (1,2,3,4,5,6) = 6 วิธี
 หยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่ 1 สำรับ (มี 52 ใบ) = 52 วิธี
 จำนวนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ทั้งหมด = $(2)(6)(52) = 624$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.20 จะมีวิธีสร้างจำนวนเต็ม 3 หลัก ได้กี่วิธี ถ้าต้องใช้จำนวน 1, 2, 5, 9, 6 โดยไม่ซ้ำกัน

วิธีทำ จำนวนวิธีวิธีทั้งหมด = $(5)(4)(3) = 60$ วิธี

บทนิยามที่ 3.13 วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation) คือการนำเอาสิ่งของทั้งหมดหรือบางส่วน มาจัดเรียงกัน โดยถือว่าลำดับที่มีความสำคัญ

ถ้านำอักษร a b และ c มาจัดเรียงสับเปลี่ยนจัดได้เป็น abc acb bac bca cab cba จะมี 6 แบบ ที่แตกต่างกัน นั่นคือ หากใช้ทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ว่ามีตำแหน่งอยู่ 3 ตำแหน่ง ตำแหน่งที่ 1 สามารถจัดอักษรลงได้ 3 วิธี ตำแหน่งที่ 2 สามารถจัดอักษรลงได้ 2 วิธี หลังจากจัดตำแหน่งที่ 1 แล้ว และมีอีก 1 ตำแหน่งที่จะจัดอักษรตัวที่ 3 ลงไป หลังจากได้จัดอักษรลงตำแหน่งที่ 1 และ 2 แล้ว ดังนั้น จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 3 ตัว ได้ $(3)(2)(1) = 6$ วิธี

นั่นคือ หากมีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนได้ $n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)$ วิธี และจะแทนผลคูณดังกล่าวด้วย $n!$ อ่านว่า “เอ็นแฟคทอเรียล (n factorial)” หรือ “แฟคทอเรียลเอ็น (factorial n)” เช่น หากมีสิ่งของ 3 สิ่ง ที่แตกต่างกัน จะเรียงสับเปลี่ยนได้ $3! = (3)(2)(1) = 6$ วิธี โดยบทนิยามนี้กำหนดให้ $1! = 1$ และ $0! = 1$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 มีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนจะจัดได้ $n!$ วิธี

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว ที่ประกอบด้วย a b c และ d จัดได้ $4! = 24$ วิธี หากพิจารณาจำนวนวิธีของการนำอักษร 4 ตัว มาเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ 2 ตัว จะจัดได้เป็น ab ac ad bc cd da cb db dc จากทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ว่า มีตำแหน่ง 2 ตำแหน่ง ที่จะจัดอักษร 4 ตัวลงไป โดยตำแหน่งที่ 1 จัดได้ 4 วิธี ในขณะที่ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ 3 วิธี (หลังจากจัดตำแหน่งที่ 1 แล้ว) ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 4 สิ่ง ที่แตกต่างกัน ครั้งละ 2 สิ่ง จะจัดได้ $(4)(3) = 12$ วิธี นั่นคือ ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันนำมาเรียงสับเปลี่ยน ครั้งละ r สิ่ง จะจัดได้

$(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ วิธี และจะแทนผลคูณดังกล่าวด้วย $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

ทฤษฎีบทที่ 3.4 มีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำมาเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r สิ่ง จะจัดได้

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{วิธี}$$

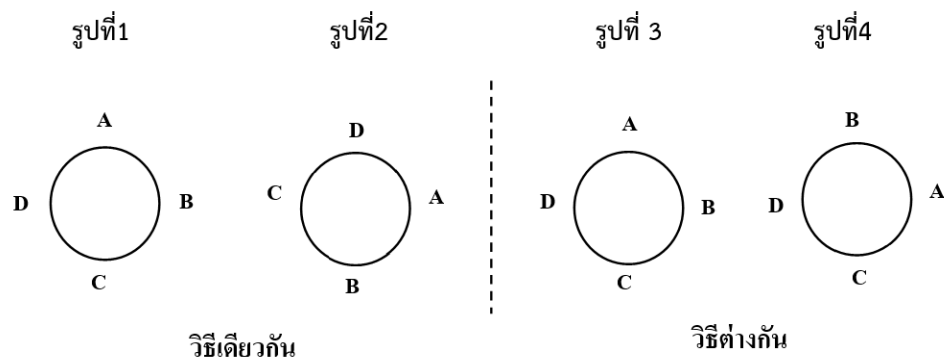
ตัวอย่างที่ 3.21 จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกประธานนักเรียน 1 คน และรองประธานนักเรียน 1 คน จากนักเรียนทั้งหมด 20 คน

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จำนวนวิธีทั้งหมดเป็น } P(20, 2) &= \frac{20!}{(20-2)!} \quad \text{วิธี} \\ &= \frac{20!}{18!} \quad \text{วิธี} \\ &= (20)(19) \quad \text{วิธี} \\ &= 380 \quad \text{วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.22 จัดนักเรียนชาย 4 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดานครั้งละ 3 คน จะจัดได้กี่วิธี

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จำนวนวิธีทั้งหมดเป็น } P(4, 3) &= \frac{4!}{(4-3)!} \quad \text{วิธี} \\ &= \frac{4!}{1!} \quad \text{วิธี} \\ &= 24 \quad \text{วิธี} \end{aligned}$$

การเรียงสับเปลี่ยนในบางครั้ง อาจเกิดจากการนำสิ่งของที่ต้องการจัดไปเรียงสับเปลี่ยนในรูปวงกลม ซึ่งเรียกว่าการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม 2 แบบ ไม่ถือว่าเป็นวิธีที่แตกต่างกัน ถ้าการจัดนั้นเกิดจากการหมุนวงกลม



ภาพที่ 3.7 การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

จากภาพที่ 3.7 รูปที่ 1 และรูปที่ 2 เป็นวิธีการเดียวกัน ส่วนรูปที่ 3 และรูปที่ 4 เป็นวิธีที่แตกต่างกัน เช่น การจัดนักกีฬาบอลเลย์บอล 6 คน ยืนเดาะบอลเป็นวงกลม ทำได้โดยการกำหนดให้ นักกีฬา 1 คนยืนกับที่ และเรียงสับเปลี่ยนนักกีฬาบอลเลย์บอลอีก 5 คนที่เหลือ ได้ 5! วิธี จะได้ว่าวิธีจัดนักกีฬา 6 คน ยืนเดาะบอลเป็นวงกลม ด้วยวิธีที่แตกต่างกันได้ 5! วิธี นั่นเอง

ทฤษฎีบทที่ 3.5 มีสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน นำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม จะจัดได้ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.23 นักเรียนอนุบาล 5 คน นั่งม้าหมุนได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีนั่งม้าหมุนทำได้

$$\begin{aligned}
 &= (5-1)! && \text{วิธี} \\
 &= 4! && \text{วิธี} \\
 &= 24 && \text{วิธี}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.24 ดอกไม้ 9 ชนิด ร้อยมาลัยข้อมือโดยใช้ดอกไม้ทั้ง 9 ชนิด ได้กี่แบบที่แตกต่างกัน

วิธีทำ จะร้อยมาลัยข้อมือที่แตกต่างกันได้

$$\begin{aligned}
 &= (9-1)! && \text{แบบ} \\
 &= 8! && \text{แบบ} \\
 &= 40,320 && \text{แบบ}
 \end{aligned}$$

การพิจารณาวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ต่างกัันทั้งหมด แต่หากจัดเรียงสับเปลี่ยนอักษร 3 ตัว และมีอักษร 2 ตัวที่เหมือนกัน เช่น จัดเรียง a, b, c แต่ $b = c = x$ แล้ว จะจัดได้ดังนี้

$a b c$	$\longrightarrow$	$a x x$
$a c b$	$\longrightarrow$	$a x x$
$b a c$	$\longrightarrow$	$x a x$
$b c a$	$\longrightarrow$	$x x a$
$c a b$	$\longrightarrow$	$x a x$
$c b a$	$\longrightarrow$	$x x a$

ผลการจัดเรียงจะมี 3 ชุดเท่านั้นที่แตกต่างกัน นั่นคือ จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรหรือสิ่งของ 3 สิ่ง ที่เหมือนกัน 2 ตัว ได้เพียง $\frac{3!}{2!} = 3$ วิธี ที่แตกต่างกันเท่านั้น หรือจะเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว a, b, c, d ได้ 24 วิธี แต่หากมี $a = b = x, c = d = y$ จะเรียงสับเปลี่ยนได้ดังนี้

$$xxyy, xyxy, yyxx, xyxy, yxyx, yxyx$$

นั่นคือ จัดได้ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี ที่แตกต่างกัน

ทฤษฎีบทที่ 3.6 มีสิ่งของ n สิ่ง แบ่งเป็น k ชนิด ชนิดที่ 1 มีอยู่ n_1 สิ่ง ชนิดที่ 2 มีอยู่ n_2 สิ่ง ชนิดที่ 3 มีอยู่ n_3 สิ่ง และชนิดที่ k มีอยู่ n_k สิ่ง เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ จะเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของทั้ง n สิ่งนั้น ได้ $\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.25 ดวงไฟสีต่าง ๆ 9 ดวง ประกอบด้วยดวงไฟสีแดง 3 ดวง สีเหลือง 4 ดวง และสีเขียว 2 ดวง จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดที่แตกต่างกัน เป็น $\frac{9!}{4!3!2!} = 1,260$ วิธี

บ่อยครั้งที่ต้องเกี่ยวข้องกับจำนวนวิธีในการแบ่งกลุ่มสิ่งของ n สิ่ง เป็น r กลุ่ม ซึ่งการแบ่งนี้จะแบ่งเป็นกลุ่มได้ชัดเจนไม่ซ้ำซ้อน ถ้าส่วนร่วม (intersection) ของทุก ๆ คู่ ที่เป็นไปได้ของทั้ง r กลุ่มเป็นเซตว่าง ($\emptyset$) และถ้าส่วนร่วมของทุกสับเซตเป็นเซตเต็ม และลำดับที่ภายในกลุ่มถือว่าไม่สำคัญ ลองพิจารณาแบ่ง $\{A, E, I, O, U\}$ เป็น 2 กลุ่ม ที่เป็นไปได้ โดยให้กลุ่มแรกมีสมาชิก 4 ตัว และกลุ่มที่ 2 มีสมาชิก 1 ตัว จะแบ่งเป็น

แบบที่ 1 $\{(A, E, I, O), (U)\}$

แบบที่ 2 $\{(A, I, O, U), (E)\}$

แบบที่ 3 $\{(A, E, O, U), (I)\}$

แบบที่ 4 $\{(A, E, I, U), (O)\}$

แบบที่ 5 $\{(E, I, O, U), (A)\}$

จะเห็นได้ว่ามี 5 วิธี ที่จะแบ่งเซตที่มีสมาชิก 5 ตัว เป็น 2 เซตย่อย ที่มีสมาชิกเป็น 4 ในเซตย่อยที่ 1 และมีสมาชิกเป็น 1 ในเซตย่อยที่ 2 จำนวนผลแบ่งส่วน (partition) สำหรับการแบ่งดังกล่าวเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\binom{5}{4, 1} = \frac{5!}{4!1!} = 5 \text{ วิธี}$$

เมื่อตัวเลขด้านบน (5) แทนจำนวนสิ่งของทั้งหมด และตัวเลขตัวล่าง (4 กับ 1) แทนจำนวนของสิ่งของ แต่ละกลุ่มย่อยกลุ่มที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

ทฤษฎีบทที่ 3.7 มีสิ่งของ n สิ่ง แบ่งเป็น r กลุ่มย่อย โดยที่จำนวนสมาชิกในกลุ่มย่อยที่ 1 สมาชิกในกลุ่มย่อยที่ 2 กลุ่มย่อยที่ 3...กลุ่มย่อยที่ r เป็น $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ ตามลำดับ มีจำนวนวิธีที่จะแบ่งได้เป็น

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \quad \text{เมื่อ } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$$

ตัวอย่างที่ 3.26 จัดคน 7 คน ให้เข้าพักห้องละ 3 คน 1 ห้อง และห้องละ 2 คน 2 ห้อง ได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีทั้งหมดของการจัดคนเข้าพักเป็น

$$\binom{7}{3, 2, 2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210 \text{ วิธี}$$

ในบางครั้งเราสนใจจำนวนวิธีในการเลือกสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง โดยไม่สนใจลำดับที่ การเลือกในลักษณะนี้เรียกว่า วิธีจัดหมู่ (combination) วิธีจัดหมู่เป็นการแบ่งสิ่งของทั้งหมด n สิ่งเป็น 2 กลุ่มย่อย โดยที่กลุ่มหนึ่งจะมีสมาชิกอยู่ r สิ่ง และอีกกลุ่มหนึ่ง มีสมาชิกอยู่ $n - r$ สิ่ง

ดังนั้น จำนวนวิธีในการจัดหมู่ดังกล่าวคือ $\binom{n}{r, n-r}$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $\binom{n}{r}$ เพราะว่า

จำนวนสมาชิกในอีกกลุ่มย่อยจะเป็น $n-r$

ทฤษฎีบทที่ 3.8 มีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดหมู่ครั้งละ r สิ่งจะจัดได้ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.27 กรรมการสโมสรนักศึกษา ประกอบด้วยนักศึกษาชาย 4 คน นักศึกษาหญิง 7 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแทนกรรมการ 5 คน ให้ได้กรรมการเป็นชาย 2 คน และหญิง 3 คน

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแทนกรรมการเป็นชาย 2 คน จากนักศึกษาชาย 4 คน เป็น

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแทนกรรมการเป็นหญิง 3 คน จากนักศึกษาหญิง 7 คน เป็น

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกตัวแทนกรรมการสโมสรนักศึกษาให้ได้กรรมการชาย 2 คน และกรรมการหญิง 3 คน เท่ากับ $(6)(35) = 210$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.28 ร้านสวัสดิการจำหน่ายอาหาร 20 ชนิด มีอาหารคาว 10 ชนิด ผลไม้ 6 ชนิด และเครื่องดื่ม 4 ชนิด นักศึกษาคนหนึ่งรับประทานอาหารกลางวันที่ร้านสวัสดิการ จงหาจำนวนวิธีที่นักศึกษาคนนี้จะเลือกรับประทานอาหารคาว 1 ชนิด ขนมหวาน 1 ชนิด และเครื่องดื่มอีก 1 ชนิด

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะเลือกอาหารคาว $= \binom{10}{1} = 10$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะเลือกรับประทานขนมหวาน $= \binom{6}{1} = 6$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะเลือกเครื่องดื่ม $= \binom{4}{1} = 4$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่นักศึกษาคนนี้จะเลือกอาหารกลางวัน $= (10)(6)(4) = 240$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.29 คณะกรรมการดำเนินการ สหกรณ์ออมทรัพย์ 10 คน ตกลงกันว่า ในการประชุมคราวหนึ่ง ๆ จะต้องมิให้ผู้เข้าประชุมอย่างน้อยครึ่งหนึ่งของจำนวนกรรมการ จึงจะถือว่าครบองค์ประชุม อยากทราบว่า จะมีการประชุมที่ครบองค์ประชุมกี่วิธี

วิธีทำ การมีกรรมการครบองค์ประชุม ตามข้อตกลงในกรณีนี้ จะต้องมิให้มีสมาชิกเข้าร่วมประชุมไม่น้อยกว่า 5 คน นั่นคือ จะต้องมิให้ผู้มาประชุม 5 คน หรือ 6 คน หรือ 7 คน หรือ 8 คน หรือ 9 คน หรือ 10 คน ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \text{จำนวนวิธีที่จะประชุมแบบครบองค์ประชุม} &= \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \\
 &= 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 \\
 &= 638 \quad \text{วิธี}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.30 จิตจาดมีเพื่อนอยู่ 4 คน จะมีวิธีเชิญมารับประทานอาหารอย่างน้อย 1 คน ได้กี่วิธี

วิธีทำ การเชิญเพื่อนอย่างน้อย 1 คน หมายถึงการเชิญเพื่อน 1 คน หรือ 2 คน หรือ 3 คน หรือ 4 คน จากที่มีเพื่อนอยู่ 4 คน

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น จำนวนวิธีที่จิตจาดจะเชิญเพื่อนได้} &= \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \\
 &= 4 + 6 + 4 + 1 \\
 &= 15 \quad \text{วิธี}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.31 ร้านขายโรตีสี่แห่งหนึ่งในจังหวัดนครศรีธรรมราช มีตำแหน่งงานว่างอยู่ 3 ตำแหน่ง มีผู้สมัคร 9 คน เป็นชาย 4 คน และหญิง 5 คน อยากทราบว่าจะมีวิธีคัดเลือกคนกี่วิธี ถ้าทุกคนมีความรู้ความสามารถพอกัน และคณะกรรมการต้องการได้พนักงานผู้ชาย 2 คน และผู้หญิง 1 คน

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{ห้างสรรพสินค้าจะมีวิธีคัดเลือกให้ได้พนักงานผู้ชาย 2 คน} = \binom{4}{2} = 6 \quad \text{วิธี}$$

$$\text{ห้างสรรพสินค้าจะมีวิธีคัดเลือกให้ได้พนักงานผู้หญิง 1 คน} = \binom{5}{1} = 5 \quad \text{วิธี}$$

$$\text{ดังนั้น ร้านขายโรตีสี่จะมีวิธีคัดเลือกพนักงาน} = (6)(5) = 30 \quad \text{วิธี}$$

3.5 การคำนวณค่าความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น (probability) เป็นโอกาสที่คาดหวังว่าเหตุการณ์ในอนาคตที่สนใจจะเกิดขึ้น ค่าของความน่าจะเป็นคำนวณได้จากสัดส่วนของจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์กับจำนวนสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์หรือปริภูมิตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่สนใจ

บทนิยามที่ 3.14 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใด ๆ เขียนแทนด้วย $P(A)$ โดยที่ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

เมื่อ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ A และ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3.32 หยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่ 1 สำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้ไพ่โพแดง

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการหยิบไพ่ 1 ใบ จาก 1 สำรับ ที่มี 52 ใบ

$$n(S) = \binom{52}{1} = 52$$

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ 1 ใบ จากสำรับ ให้ได้ไพ่โพแดง ที่มี 13 ใบ

$$n(A) = \binom{13}{1} = 13$$

$$\text{จาก } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{52} = 0.25$$

ตัวอย่างที่ 3.33 ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มเป็น 8

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างจากการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง

ให้ (a, b) เป็นสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง โดยที่ a แทนหน้าลูกเต๋าลูกที่ 1 และ b แทนหน้าลูกเต๋าลูกที่ 2

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$n(S) = 36$$

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของหน้าลูกเต๋าคือ 8

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

$$n(A) = 5$$

$$\text{ดังนั้น } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{5}{36}$$

$$= 0.13$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 8 เท่ากับ 0.13

3.6 กฎเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

1. $P(S) = 1$ เมื่อ S แทนปริภูมิตัวอย่าง

$$\text{จาก } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$= 1$$

2. $P(\phi) = 0$ เมื่อ ϕ แทนเซตว่าง

$$\text{จาก } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(S)}$$

$$= 0$$

$$[n(\phi) = 0 = \text{จำนวนสมาชิกของเซตว่าง}]$$

3. เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B จะเรียกว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วม (mutually exclusive events) ถ้า $A \cap B = \phi$ และกล่าวได้ว่าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์จะเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วม ถ้าเซต 2 เซตนั้นเป็นเซตไม่มีส่วนร่วม

ตัวอย่างที่ 3.33 หยิบไฟ 1 ใบ จาก 1 สำหรับ ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไฟโพดำ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไฟโพแดง จงพิจารณา $A \cap B$

วิธีทำ $A \cap B = \phi$ เนื่องจากไม่มีไฟใบใดใน 1 สำหรับ ที่มีทั้งโพดำและโพแดงอยู่บนใบเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่ 3.9 ถ้า A และ B เป็น 2 เหตุการณ์ใด ๆ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

บทแทรกที่ 1 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

บทแทรกที่ 2 ถ้า $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

ข้อสังเกต ถ้า $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เป็นผลแบ่งส่วน (partitions) ของปริภูมิตัวอย่าง S แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

ตัวอย่างที่ 3.34 ความน่าจะเป็นที่หยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่ 1 สำรับ ให้ได้ไพ่ข้าวหลามตัดเป็น $\frac{13}{52}$ และ ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ไพ่รูปเต๋า (ไพ่ K, Q, J) เป็น $\frac{12}{52}$ จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบไพ่ 1 ใบ จาก 1 สำรับ แล้วให้ได้ไพ่ข้าวหลามตัดหรือไพ่รูปเต๋า

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ข้าวหลามตัด $P(A) = \frac{13}{52}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่รูปเต๋า $P(B) = \frac{12}{52}$

$A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำและไพ่รูปเต๋า จะได้

$$P(A \cap B) = \frac{3}{52}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = 0.423 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ไพ่ข้าวหลามตัดหรือไพ่รูปเต๋าเป็น 0.423

ตัวอย่างที่ 3.35 ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาคนหนึ่ง จะสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์เป็น $\frac{2}{3}$ และความ น่าจะเป็นที่จะสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษเป็น $\frac{4}{9}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชา เป็น $\frac{4}{5}$ จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาคนนี้จะสอบผ่านทั้งสองวิชา

วิธีทำ ให้ M แทนเหตุการณ์ที่นักศึกษาสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ จะได้ $P(M) = \frac{2}{3}$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นักศึกษาสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษ จะได้ $P(E) = \frac{4}{9}$

$M \cup E$ จะเป็นเหตุการณ์ที่นักศึกษาสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชา จะได้ $P(M \cup E) = \frac{4}{5}$

$$\text{จาก } P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E)$$

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - P(M \cap E)$$

$$P(M \cap E) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45} = 0.311$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาจะสอบผ่านทั้งสองวิชาเป็น 0.311

ตัวอย่างที่ 3.36 โยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มเป็น 5 หรือ 9

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างจากการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มเป็น 5

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \quad \text{จะได้} \quad P(A) = \frac{4}{36}$$

ให้ B แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มเป็น 9

$$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \quad \text{จะได้} \quad P(B) = \frac{4}{36}$$

$$A \cap B \text{ แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มเป็น 5 และ 9} \quad P(A \cap B) = 0$$

แสดงว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

$$A \cup B \text{ แทนเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มเป็น 5 หรือ 9}$$

$$\text{จาก} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} - 0$$

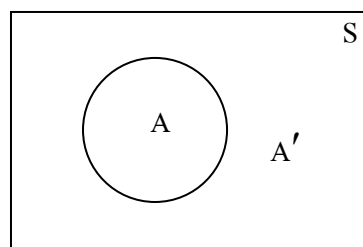
$$= \frac{8}{36}$$

$$= 0.222$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มลูกเต๋าคือ 5 หรือ 9 คือ 0.222

ทฤษฎีบทที่ 3.10 ถ้า A และ A' เป็นเหตุการณ์ที่เป็นส่วนเติมเต็มแล้ว $P(A') = 1 - P(A)$

จาก $A \cup A' = S$ เหตุการณ์ A และ A' เป็นเซตที่ไม่มีส่วนร่วม เพราะว่า $A \cap A' = \phi$



ภาพที่ 3.8 แผนภาพแทนเหตุการณ์ A และ A' เป็นเซตที่ไม่มีส่วนร่วม

$$\begin{aligned}
 \text{จากภาพที่ 3.8} \quad S &= A \cup A' \\
 P(S) &= P(A \cup A') \\
 1 &= P(A) + P(A') \quad [A \text{ และ } A' \text{ เป็นเซตไม่มีความซ้ำซ้อน}] \\
 \text{ดังนั้น} \quad P(A') &= 1 - P(A)
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.37 โยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลย

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่าง (S) จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, THT, HTT, TTH, TTT\}$$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

E' แทนเหตุการณ์ที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลย (ขึ้นก้อยทั้ง 3 เหรียญ)

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

$$P(E') = 1 - P(E)$$

$$= 1 - \frac{7}{8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$= 0.125$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลยเป็น 0.125

3.7 ความน่าจะเป็นมีเงื่อนไข

ถ้าเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เกิดขึ้นต่อเนื่องกัน โดยที่เหตุการณ์ B เกิดขึ้นหลังจากที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เช่น การหยิบลูกบอล 2 ลูก จากถุงใบหนึ่งที่มีลูกบอลสีแดง 5 ลูก ลูกบอลสีดำ 2 ลูก ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่ 1 ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีดำในการหยิบครั้งที่ 2 หลังจากที่ยืมได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่ 1 นั่นคือ เหตุการณ์ B เกิดขึ้นหลังจากที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เรียกความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้ว่า ความน่าจะเป็นมีเงื่อนไข (ทวิรัตน์า ศิวดุรงค์, 2539; ลดาวัลย์ รามางกูร, 2552; มนตรี สังข์ทอง, 2557) และใช้ $P(B/A)$ แทน ความน่าจะเป็นมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว

บทนิยามที่ 3.15 ความน่าจะเป็นมีเงื่อนไข (conditional probability) ของเหตุการณ์ B เมื่อทราบแน่นอนแล้วว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เขียนแทนด้วย $P(B/A)$ กำหนดโดยสมการ

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} ; P(A) \neq 0$$

จากบทนิยามจะได้ว่า $P(A \cap B) = P(A) P(B|A) \dots\dots\dots (1)$

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} ; P(B) \neq 0$$

แทนความน่าจะเป็นมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A เมื่อเหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้ว

และ $P(B \cap A) = P(B) P(A|B) \dots\dots\dots (2)$

จาก $A \cap B = B \cap A$

ดังนั้น $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

จะได้ $P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B) \quad [(1) = (2)]$

นั่นคือ $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B)$

ทฤษฎีบทที่ 3.11 ถ้า A, B เป็นเหตุการณ์ซึ่งเหตุการณ์ B เกิดขึ้น หลังจากที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว $P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$

ตัวอย่างที่ 3.38 หยิบไพ่ 2 ใบ จากไพ่ 1 สำรับที่มี 52 ใบ โดยหยิบทีละใบแบบไม่คืนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ทั้ง 2 ใบ จะเป็นไพ่ดอกจิก

วิธีทำ ให้ A_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ดอกจิกในการหยิบครั้งที่ 1

A_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ดอกจิกในการหยิบครั้งที่ 2

$A_1 \cap A_2$ จะเป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ดอกจิกในครั้งที่ 1 และหยิบได้ไพ่ดอกจิกในการหยิบครั้งที่ 2 หลังจากหยิบได้ไพ่ดอกจิกแล้วในการหยิบครั้งที่ 1

$$P(A_1) = \frac{13}{52}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{12}{51}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

$$= \left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)$$

$$= 0.059$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ไพ่ทั้งสองใบเป็นไพ่ดอกจิกเป็น 0.059

ทฤษฎีบทที่ 3.12 ถ้า $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นต่อเนื่องกัน แล้ว

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot P(A_4|A_1A_2A_3) \\ \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1A_2A_3\dots A_{n-1})$$

ตัวอย่างที่ 3.39 ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีดำ 7 ลูก ปนกันอยู่ ถ้าหยิบลูกบอลอย่างสุ่มทีละลูกโดยไม่คืนที่ 2 ครั้ง จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกบอลสีแดงทั้งหมด
2. ความน่าจะเป็นที่ครั้งแรกได้ลูกบอลสีแดงและครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีดำ และ
3. ถ้าหยิบอย่างสุ่มมา 4 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่ได้ลูกบอลสีแดงเลย

วิธีทำ ให้ R_1 เป็นเหตุการณ์หยิบได้ลูกบอลสีแดงในครั้งที่ 1

R_2 เป็นเหตุการณ์หยิบได้ลูกบอลสีแดงในครั้งที่ 2

B_1, B_2, B_3, B_4 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีดำในครั้งที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

1. ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้งหมด หมายถึงความน่าจะเป็น ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้ง 2 ครั้ง

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(R_1) P(R_2|R_1) \\ &= \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{9}\right) \\ &= \left(\frac{6}{90}\right) \\ &= 0.067 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้งหมดเป็น 0.067

2. ความน่าจะเป็นที่ครั้งแรกได้ลูกบอลสีแดง และครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีดำ หมายถึงความน่าจะเป็นที่หยิบลูกบอลครั้งแรกได้ลูกบอลสีแดงและหยิบครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีดำ

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap B_2) &= P(R_1) P(B_2|R_1) \\ &= \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{9}\right) \\ &= \left(\frac{21}{90}\right) \\ &= 0.233 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ครั้งแรกได้ลูกบอลสีแดงและครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีดำเป็น 0.233

3. ถ้าหยิบอย่างสุ่มมา 4 ลูก ความน่าจะเป็นที่ไม่ได้สีแดงเลย หมายถึงหยิบได้ลูกบอลสีดำทั้ง 4 ครั้ง

$$\begin{aligned} P(B_1 B_2 B_3 B_4) &= P(B_1) P(B_2|B_1) P(B_3|B_1 B_2) P(B_4|B_1 B_2 B_3) \\ &= \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{6}{9}\right) \left(\frac{5}{8}\right) \left(\frac{4}{7}\right) \\ &= \frac{840}{5040} \\ &= 0.167 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ไม่ได้ลูกบอลสีแดงเลยเป็น 0.167

จากตัวอย่างที่ 3.38 การหยิบไฟที่กล่าวข้างต้นเป็นการหยิบแบบคืนที่ และไฟสำหรับนั้นได้ทำการสับไฟก่อนที่จะหยิบไฟใบที่ 2 ความน่าจะเป็นของการหยิบได้ไฟดอกจิกในครั้งที่ 2 จะยังคงเป็น $\frac{13}{52}$ ดังนั้น $P(A_2|A_1) = P(A_2)$ เรียกเหตุการณ์ A_1, A_2 ว่าเป็นเหตุการณ์อิสระกัน นั่นคือ เหตุการณ์ A_1 จะเกิดหรือไม่เกิด ไม่ได้ขึ้นอยู่กับการเกิดหรือไม่เกิดของเหตุการณ์ A_2

บทนิยามที่ 3.16 เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นอิสระกัน ก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

ตัวอย่างที่ 3.40 สาขาวิชาคณิตศาสตร์มีนักศึกษา 38 คน เป็นนักศึกษาชาย 7 คน นักศึกษาหญิง 31 คน จากจำนวนนักศึกษาทั้งหมดเป็นนักศึกษาชายและพักอยู่ในหอพักของสถาบัน 5 คน เป็นนักศึกษาหญิงและพักอยู่ในหอพักของสถาบัน 21 คน เพศหญิงและการพักหอพักของสถาบันเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

วิธีทำ ให้ F แทนนักศึกษาหญิง

D แทนนักศึกษาที่พักหอพักสถาบัน

F' แทนนักศึกษาชาย

D' แทนนักศึกษาที่ไม่พักหอพักสถาบัน

แสดงข้อมูลการพักหรือไม่พักหอพักของนักศึกษาได้ ดังนี้

	F	F'	รวม
D	21	5	26
D'	10	2	12
รวม	31	7	38

$$P(F \cap D) = \frac{21}{38} = 0.55$$

$$P(F) P(D) = \left(\frac{31}{38} \right) \left(\frac{26}{38} \right) = 0.55$$

$$P(F \cap D) = P(F) P(D)$$

ดังนั้น เพศหญิงและการพักหอพักเป็นอิสระกัน

บทนิยามที่ 3.17 ถ้า $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกันแล้ว

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) \dots P(A_n)$$

ตัวอย่างที่ 3.41 ถัาร้อยละ 50 ของต้นไม้ที่ปลูกในกิจกรรม 1 คน 1 ต้นไม้หายาก จะออกดอกสีขาว ที่เหลือจะออกดอกสีอื่น สมมติว่าการออกดอกของต้นไม้แต่ละต้นเป็นอิสระกัน และถ้าในวันดังกล่าว มีการปลูกต้นไม้หายาก 6 ต้น ความน่าจะเป็นที่ต้นไม้แต่ละต้นออกดอกสีขาวเป็นเท่าใด

วิธีทำ ให้ T_i เป็นเหตุการณ์ที่ต้นไม้ต้นที่ i ออกดอกสีขาว

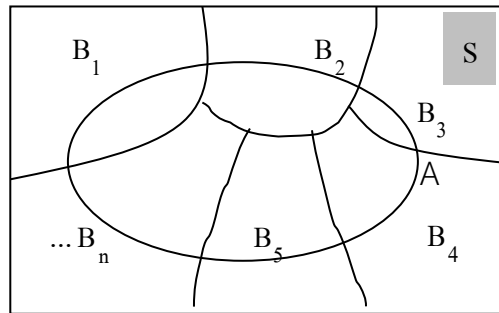
$T_1, T_2, T_3, \dots, T_6$ เป็นอิสระกัน

$$\begin{aligned} P(T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6) &= P(T_1) P(T_2) P(T_3) P(T_4) P(T_5) P(T_6) \\ &= (0.50)^6 \\ &= 0.016 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ต้นไม้แต่ละต้นออกดอกสีขาวเป็น 0.016

3.8 การหาความน่าจะเป็นโดยการแบ่งส่วนเหตุการณ์

ถ้าให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งถูกแบ่งเป็นผลแบ่งส่วน n เหตุการณ์ คือ $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_n$ โดยแต่ละเหตุการณ์ไม่มีสมาชิกร่วมกัน $B_i \cap B_j = \emptyset$ และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ดังภาพที่ 3.9



ภาพที่ 3.9 แผนภาพแสดงผลแบ่งส่วนของปริภูมิตัวอย่าง S

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup \dots \cup (B_n \cap A)$$

และ $B_i \cap A$ กับ $B_j \cap A$ ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย ในที่นี้ต้องการหา $P(A)$ เมื่อเหตุการณ์ B_i เกิดขึ้นแล้ว ดังนั้น

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A) + \dots + P(B_n \cap A) \quad \dots (1)$$

$$\text{จาก } P(B_i \cap A) = P(B_i) P(A|B_i)$$

$$\text{จะได้ } P(A) = P(B_1) P(A|B_1) + P(B_2) P(A|B_2) + P(B_3) P(A|B_3) + \dots + P(B_n) P(A|B_n) \quad \dots (2)$$

ตัวอย่างที่ 3.42 ตู้ใส่เอกสารใบหนึ่งมี 4 ชั้น ในแต่ละชั้นมีจำนวนเอกสารแต่ละชนิด ดังนี้

ชั้น	1	2	3	4	รวม
เอกสารหมายเลข 1	3	4	0	2	9
เอกสารหมายเลข 2	4	0	5	2	11
เอกสารหมายเลข 3	0	5	1	4	10
รวม	7	9	6	8	30

1. ถ้าเปิดตู้เอกสารชั้นใดชั้นหนึ่งแล้วหยิบเอกสารมา 1 ชุด จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เอกสารหมายเลข 3

2. ถ้าเปิดตู้เอกสารชั้นใดชั้นหนึ่งแล้วหยิบเอกสารมา 3 ชุด จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เอกสารหมายเลข 1 2 ชุด

วิธีทำ 1. ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้เอกสารหมายเลข 3

B_1, B_2, B_3, B_4 เป็นเหตุการณ์ที่เปิดตู้ชั้นที่ 1 2 3 และ 4 ตามลำดับ

$P(A)$ จะเป็นความน่าจะเป็นที่หยิบได้เอกสารหมายเลข 3 ซึ่งในการที่จะหยิบได้เอกสารหมายเลข 3 นั้น อาจหยิบได้จากตู้ชั้นที่ 2 3 หรือ 4 เท่านั้น เนื่องจากตู้ชั้นที่ 1 ไม่มีเอกสารหมายเลข 3

$$P(B_i) = \frac{1}{4} ; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A) + P(B_4 \cap A) \\ &= P(B_1) P(A|B_1) + P(B_2) P(A|B_2) + P(B_3) P(A|B_3) + P(B_4) P(A|B_4) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)(0) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{8}\right) \\ &= 0 + \frac{5}{36} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{44}{144} \\ &= 0.306 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้เอกสารหมายเลข 3 เป็น 0.306

2. ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้เอกสารหมายเลข 1 จำนวน 2 ชุด จากการหยิบเอกสารทั้งหมด 3 ชุด

ให้ B_1, B_2, B_3, B_4 เป็นเหตุการณ์ที่เปิดตู้ชั้นที่ 1 2 3 และ 4 ตามลำดับ

จะต้องการ $P(D)$

$$\begin{aligned} P(B_i) &= \frac{1}{4} ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ P(D) &= P(B_1 \cap D) + P(B_2 \cap D) + P(B_3 \cap D) + P(B_4 \cap D) \\ &= P(B_1) P(D|B_1) + P(B_2) P(D|B_2) + P(B_3) P(D|B_3) + P(B_4) P(D|B_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{1}{4} \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} + \frac{1}{4} (0) + \frac{1}{4} \frac{\binom{2}{2} \binom{6}{1}}{\binom{8}{3}} \\
&= \frac{3}{35} + \frac{5}{56} + 0 + \frac{3}{112} \\
&= \frac{791}{3920} \\
&= 0.202
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้เอกสารหมายเลข 1 จำนวน 2 ชุด จากการหยิบเอกสารทั้งหมด 3 ชุด เป็น 0.202

ตัวอย่างที่ 3.43 กล่องใบหนึ่งบรรจุดินสอสีแดง 8 อัน สีเขียว 4 อัน หยิบดินสอมา 2 อัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ดินสอสีเดียวกัน

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ดินสอสีเดียวกัน คือหยิบได้ดินสอสีแดงทั้ง 2 อัน หรือหยิบได้ดินสอสีเขียวทั้ง 2 อัน

$$\begin{aligned}
&R_1, R_2 \text{ เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ดินสอสีแดงในการหยิบครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2} \\
&G_1, G_2 \text{ เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ดินสอสีเขียวในการหยิบครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2} \\
&A = (R_1 \cap R_2) \cup (G_1 \cap G_2) \\
&P(A) = P(R_1 \cap R_2) + P(G_1 \cap G_2) \\
&= P(R_1) P(R_2|R_1) + P(G_1) P(G_2|G_1) \\
&= \left(\frac{8}{12}\right) \left(\frac{7}{11}\right) + \left(\frac{4}{12}\right) \left(\frac{3}{11}\right) \\
&= \frac{56}{132} + \frac{12}{132} \\
&= \frac{68}{132} \\
&= 0.515
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ดินสอสีเดียวกันเป็น 0.515

3.9 กฎของเบย์

กำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นผลแบ่งส่วนของปริภูมิตัวอย่าง S ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B_k เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว นั่นคือ ต้องการหา $P(B_k|A)$

$$\text{จาก } P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$\text{จะได้ } P(B_k \cap A) = P(A)P(B_k|A)$$

และจากสมการ

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) P(A|B_1) + P(B_2) P(A|B_2) + P(B_3) P(A|B_3) + \dots + P(B_n) P(A|B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

เรียกว่ากฎของเบย์ (Baye's law) (Walpole, 1970)

ทฤษฎีบทที่ 3.13 ถ้า $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นผลแบ่งส่วนของปริภูมิตัวอย่าง S และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ซึ่ง $P(A) \neq 0$ จะได้ว่า

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

ตัวอย่างที่ 3.44 จากตัวอย่างเรื่องการหยิบเอกสาร ถ้าเปิดดูแล้วหยิบเอกสารมา 3 ชุด ปรากฏว่าเป็นเอกสารหมายเลข 1 2 ชุด จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นการหยิบจากตู้ชั้นที่ 2

วิธีทำ

$$\begin{aligned} P(B_2|C) &= \frac{P(B_2)P(D|B_2)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(D|B_i)} \\ &= \frac{P(B_2)P(D|B_2)}{P(B_1)P(D|B_1) + P(B_2)P(D|B_2) + P(B_3)P(D|B_3) + P(B_4)P(D|B_4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}} \\
= & \frac{\left(\frac{1}{4} \right) \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}} + \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}} + \left(\frac{1}{4} \right) (0) + \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}}}{\frac{3}{35} + \frac{5}{56} + 0 + \frac{3}{112}} \\
= & \frac{\frac{5}{56}}{\frac{3}{35} + \frac{5}{56} + 0 + \frac{3}{112}} \\
= & \frac{\frac{5}{56}}{\frac{113}{560}} \\
= & \frac{50}{113} \\
= & 0.442
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้จากตู้ชั้นที่ 2 เป็น 0.442

บทสรุป

ความน่าจะเป็นหรือโอกาสถูกนำมาใช้หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจศึกษาเป็นค่าที่ใช้ประเมินสถานการณ์ที่ยังไม่เกิดขึ้น โดยพิจารณาว่า เมื่อถึงเวลาเกิดเหตุการณ์แล้ว จะเกิดในลักษณะใด มีโอกาสที่จะเกิดมากน้อยเพียงใด การหาความน่าจะเป็น จะต้องหาจากการลองสุ่มซึ่งอาจจะเป็นกระบวนการอย่างง่ายที่ได้ใช้กฎการนับเบื้องต้นหรือกระบวนการที่ซับซ้อนก็ใช้กฎของเบย์ หากเป็นกรณีที่มีการลองสุ่มขั้นตอนเดียวการหาความน่าจะเป็นก็ทำได้ง่ายอาจไม่ต้องอาศัยทฤษฎีก็สามารถหาความน่าจะเป็นได้ถูกต้องครบถ้วน แต่ในกรณีที่มีการลองสุ่มมีหลายขั้นตอน ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องย่อมมีความสำคัญอย่างยิ่งที่จะช่วยในการคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ซับซ้อนเหล่านั้น

แบบฝึกหัด

1. จะสามารถจัดคน 10 คน นั่งเก้าอี้ 4 ตัว ได้กี่วิธี
2. รองเท้ายี่ห้อหนึ่งมี 6 รุ่น แต่ละรุ่นมี 4 สี ในแต่ละสีจะมี 5 ขนาด ถ้าตัวแทนจำหน่ายรองเท้ายี่ห้อนี้ ต้องการมีรองเท้าทุกรุ่น ทุกสี และทุกขนาด เขาจะต้องมีรองเท้าไว้อย่างน้อยกี่คู่
3. ถ้าต้องการแบ่งหนังสือ 15 เล่ม ออกเป็น 3 กลุ่ม โดยให้กลุ่มที่ 1 มี 7 เล่ม กลุ่ม 2 มี 4 เล่ม ที่เหลือเป็นกลุ่มที่ 3 จะจัดได้กี่วิธี
4. จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการเรียงสับเปลี่ยนอักษรในคำว่า “RESEARCH”
5. จากการสำรวจการครัวเรือนในพื้นที่ตำบลเคิ่ง อำเภอละโวด จังหวัดนครศรีธรรมราช จำนวน 159 ครัวเรือน พบว่า 51% ตั้งบ้านเรือนอยู่ห่างจากหน่วยบริการสาธารณสุขไม่เกิน 5 กิโลเมตร 16% ตั้งบ้านเรือนอยู่ห่างจากหน่วยบริการสาธารณสุขไม่เกิน 10 กิโลเมตร และ 33% ตั้งบ้านเรือนอยู่ห่างจากหน่วยบริการสาธารณสุขไม่เกิน 15 กิโลเมตร ถ้าสุ่มครัวเรือนมา 1 แห่ง และกำหนดให้ A แทนตั้งบ้านเรือนอยู่ห่างจากหน่วยบริการสาธารณสุขไม่เกิน 5 กิโลเมตร B แทนตั้งบ้านเรือนอยู่ห่างจากหน่วยบริการสาธารณสุขไม่เกิน 10 กิโลเมตร และ

- C แทนตั้งบ้านเรือนอยู่ห่างจากหน่วยบริการสาธารณสุขไม่เกิน 15 กิโลเมตร จงหา $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(AB)$, $P(A \cup B)$, $P(A|B)$ และ $P(A|C)$
6. จากข้อมูลของการไฟฟ้าส่วนภูมิภาค จังหวัดนครศรีธรรมราช พบว่า 80% ของคนนครศรีธรรมราช จ่ายค่าไฟภายในกำหนด ถ้าสุ่มตัวอย่างครอบครัวในจังหวัดนครศรีธรรมราช 2 ครอบครัว จงหาความน่าจะเป็นที่
- 6.1 ทั้ง 2 ครอบครัว จ่ายเงินค่าไฟของเดือนที่ผ่านมาในกำหนดเวลา
- 6.2 อย่างน้อย 1 ครอบครัว จ่ายเงินค่าไฟของเดือนที่ผ่านมาในกำหนดเวลา
7. กล่องใบที่หนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดงและสีขาวอย่างละ 2 ลูก กล่องใบที่สองบรรจุลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีแดง 4 ลูก โอกาสในการเลือกกล่องใบที่ 1 เป็น 0.6 และ ใบที่ 2 เป็น 0.4 ถ้าเลือกกล่องมา 1 ใบอย่างสุ่ม แล้วสุ่มลูกบอลจากกล่องที่ถูกเลือกมา 1 ลูก จงหา
- 7.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาว
- 7.2 ถ้าสุ่มได้ลูกบอลสีขาว จงหาความน่าจะเป็นที่จะมาจากกล่องใบที่ 1
8. ในการตรวจสอบคุณภาพของสินค้าชนิดหนึ่งโดยการสุ่มตัวอย่างสินค้ามาตรวจสอบ ถ้าทราบว่าสินค้าชำรุดอยู่ 10% และอีก 60% ของสินค้าชำรุดถูกตรวจสอบ 20% ของสินค้าดี ถูกสุ่มมาตรวจสอบ ถ้าสุ่มสินค้ามาตรวจสอบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นสินค้าชำรุด
9. จากข้อมูลยอดขายเครื่องคอมพิวเตอร์ของบริษัทแห่งหนึ่งใน 80 สัปดาห์ที่ผ่านมา เป็นดังนี้

จำนวนเครื่องคอมพิวเตอร์	0	1	2	3	4
จำนวนสัปดาห์	36	28	12	2	2

- 9.1 จงเขียนปริภูมิตัวอย่าง
- 9.2 จงหาความน่าจะเป็นที่ขายได้อย่างน้อย 3 เครื่องต่อสัปดาห์
10. จากการสอบถามพนักงานมหาวิทยาลัยในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งเกี่ยวกับความคิดเห็นต่อการหักเงินเดือนเข้ากองทุนประกันสังคม ปรากฏว่ามีผู้ที่เห็นด้วยและไม่เห็นด้วย ดังนี้

ความคิดเห็น	ระดับของพนักงาน		
	พนักงานระดับต้น	พนักงานระดับกลาง	ผู้บริหาร
เห็นด้วย	67	32	11
ไม่เห็นด้วย	63	18	9

ถ้าสุ่มพนักงานจากมหาวิทยาลัยดังกล่าวมา 1 คน และกำหนดให้

B แทนพนักงานระดับต้น

W แทนพนักงานระดับกลาง

M แทนพนักงานเป็นผู้บริหาร

F แทนพนักงานที่เห็นด้วยกับการมีกองทุนประกันสังคม

จงหา 10.1 $P(B \cup W)$

10.2 $P(F' \cap W)$

10.3 $P(F \cup M)$

10.4 $P(F \cup M')$

11. กำหนด $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(B/A) = 0.6$ จงหา $P(A \cup B)$ และ $P(\bar{A} \cap B)$

12. นักธุรกิจคนหนึ่งมีรถ 2 คัน สีแดงกับสีน้ำเงิน ทุกวันที่เขาขับรถไปทำงาน เขามักใช้รถสีแดงหรือสีน้ำเงินด้วยอัตราส่วน 3:1 ถ้าเขาขับรถสีแดงไปทำงาน ความน่าจะเป็นที่เขาไปทำงานทันเวลาเป็น 0.70 ถ้าเขาขับรถคันสีน้ำเงินไปทำงาน ความน่าจะเป็นที่เขาไปทำงานทันเวลาเป็น 0.50 ในวันหนึ่งเขาไปทำงานไม่ทันเวลา จงหาความน่าจะเป็นที่เขาขับคันสีแดงไปทำงาน

เอกสารอ้างอิง